

Das symmetrische Dreiphasensystem (Drehstromsystem)

1. Spannungen

Die in den drei räumlich gegenseitig um 120° versetzt angeordneten Strängen U, V, W eines Drehstromgenerators erzeugten Spannungen ("Strangspannungen") (Bild 1a)

$$\begin{aligned}
 u_U &= \mathbf{j}_{U1} - \mathbf{j}_{U2} = \hat{u}_U \times \sin \omega t \\
 u_V &= \mathbf{j}_{V1} - \mathbf{j}_{V2} = \hat{u}_V \times \sin \left(\omega t - \frac{2p}{3} \right) \\
 u_W &= \mathbf{j}_{W1} - \mathbf{j}_{W2} = \hat{u}_W \times \sin \left(\omega t - \frac{4p}{3} \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

bilden ein *symmetrisches Dreiphasensystem*, wenn ihre *Amplituden* gleich sind $\hat{u}_U = \hat{u}_V = \hat{u}_W$

und ihre gegenseitige *Phasenverschiebung* $\frac{2p}{3}$ beträgt (Bild 1b).

Die Spannungszeiger $\hat{u}_U, \hat{u}_V, \hat{u}_W$ bzw. $\underline{u}_U, \underline{u}_V, \underline{u}_W$ bilden dann einen *symmetrischen Stern* (Bild 1c).

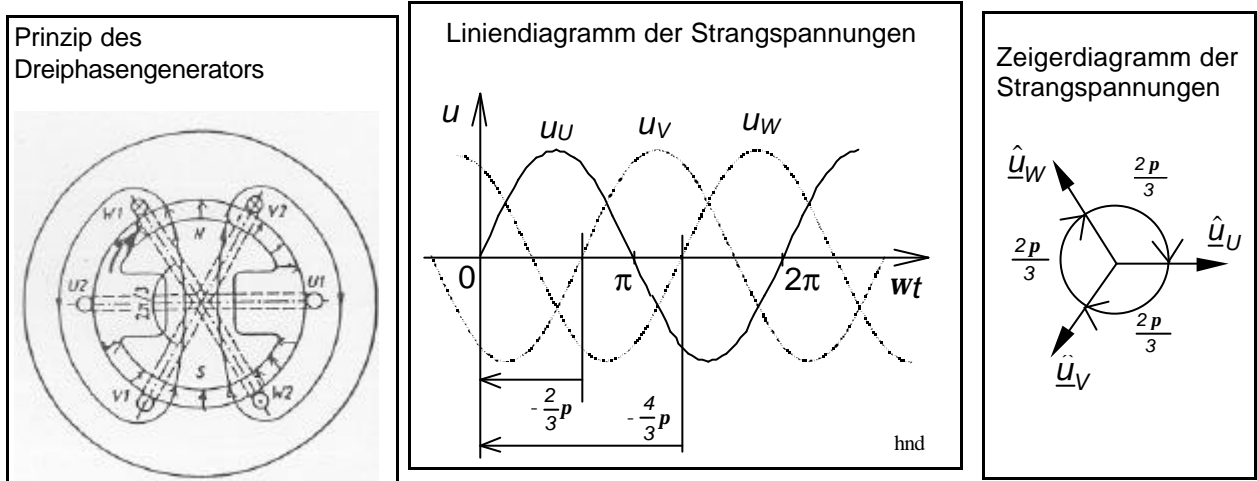


Bild 1 a) Entstehung des dreiphasigen Spannungssystems (Dreiphasensystem)

Weil bei der Speisung von drei räumlich um $\frac{2p}{3}$ versetzten Spulen mit diesem Spannungssystem ein *drehendes Magnetfeld (Drehfeld)* erzeugt werden kann, ist auch die Bezeichnung: "**Drehstrom**" gebräuchlich.

Die Erzeugung eines rotierenden magnetischen *Drehfeldes* mit Hilfe eines dreiphasigen Spannungssystems ist die Funktionsgrundlage aller *Drehfeldmaschinen* (Motoren wie Generatoren). Wenn in einer Drehfeldmaschine p symmetrische dreiphasige Spulensysteme angeordnet sind, ergibt sich bei der Frequenz f des speisenden Dreiphasensystems

die Winkelgeschwindigkeit \mathbf{W} : $\mathbf{W} = \frac{2p \times f}{p}$ und die Drehzahl n : $n = \frac{60 \times f}{p}$ in U/min. (2)

Daraus folgen die gängigen *Synchron Drehzahlen* der Drehfeldmaschinen bei Speisung aus dem 50Hz-Netz: "Polpaarzahl" p :

p :	1	2	3	4	6
Synchron Drehzahl n :	3000	1500	1000	750	500

in U/min

Die drei Stränge U, V, W können

"*unverkettet*" einzelne Verbraucher speisen: "Offenes Dreiphasensystem" (Bild 2a) (ist von untergeordneter technischer Bedeutung)

oder zwecks Einsparung von zwei bzw. drei Leitern miteinander verbunden (*verkettet*) sein :

"Verkettetes Dreiphasensystem": **Standard der öffentlichen Energieversorgungsnetze.**

2. Das verkettete Dreiphasensystem

Bezeichnungen von Spulenanschlüssen, Leitern und Formelzeichen: DIN 40 108

Die drei Stränge können auf zwei prinzipielle Weisen miteinander verbunden (verkettet) werden:

- Alle Strangenden (U2, V2, W2) zum „Sternpunkt N“ verbunden: **Sternschaltung** (Bild 2b)
- oder im Phasenfolge-Sinn jeweils Strangende mit Stranganfang (U2-V1, V2-W1, W2-U1) zur **Ringschaltung** verbunden: **Dreieckschaltung** (Bild 2c).

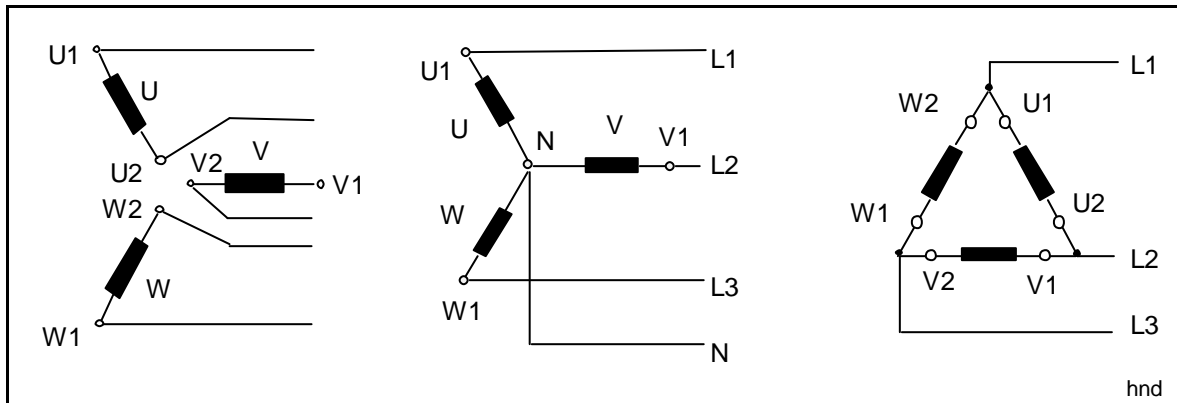


Bild 2 2a) unverkettetes Dreiphasensystem

2b) Stränge in Sternschaltung verkettet

2c) Dreieckschaltung der Stränge mit Dreileiter-Netz

2.1. Sternschaltung

An dem gemeinsamen **Sternpunkt N** kann ein für alle Stränge gemeinsamer Rückleiter (**Neutraler Leiter N**) angeschlossen werden (Bild 2b).

Die **Sternschaltung** mit neutralem Leiter N bildet das **universelle Vierleiternetz** des öffentlichen Energieverteilungssystems mit den Leiterbezeichnungen der **Außenleiter L1, L2, L3, N** (Bild 3).

Die Leiterbezeichnungen R, S, T, Mp sind nicht mehr gebräuchlich!

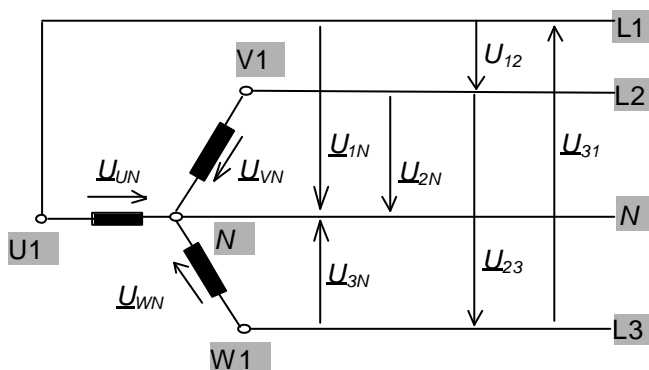


Bild 3 3a Spannungssysteme des Vierleiternetzes

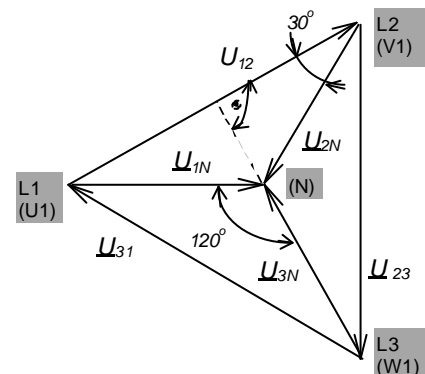


Bild 3b

Das **Vierleiternetz** (Bild 3a) bietet zwei **Spannungssysteme** mit insgesamt sechs in Betrag und Phase verschiedenen Spannungen (Bild 3b):

1. Das Dreiphasensystem der **Sternspannungen** (Außenleiterspanngn. gegen N) : $\underline{U}_{1N}, \underline{U}_{2N}, \underline{U}_{3N}$

Es ist jeweils eine **Sternspannung** \underline{U}_y gleich einer **Strangspannung** \underline{U}_{str} : (3)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_{1N} = \underline{U}_{UN} = U_{UN} \underline{\mathbb{D}} 0^\circ \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_{2N} = \underline{U}_{VN} = U_{UN} \underline{\mathbb{D}} - 120^\circ \\ \underline{U}_3 &= \underline{U}_{3N} = \underline{U}_{WN} = U_{UN} \underline{\mathbb{D}} - 240^\circ \end{aligned}$$

Wenn Verwechslung ausgeschlossen ist, kann \underline{U}_1 für \underline{U}_{1N} , \underline{U}_2 für \underline{U}_{2N} , \underline{U}_3 für \underline{U}_{3N} geschrieben werden.

2. Das Dreiphasensystem der **Außenleiterspannungen** („verkettete Spannungen“, „Dreieckspannung“) Die Spannung zwischen den Außenleitern L1-L2-L3 eines Dreiphasensystems wird **Dreieckspannung** genannt.

Aus dem Zeigerbild (Bild 3b) ist die Bildung der drei Außenleiterspannungen zwischen jeweils zwei Strang-Anfängen ersichtlich. Wegen der Übereinstimmung der Sternspannungen mit den Strangspannungen (Gl(3): $\underline{U}_{1N} = \underline{U}_{UN}$; $\underline{U}_{2N} = \underline{U}_{VN}$; $\underline{U}_{3N} = \underline{U}_{WN}$) folgt:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{UN} - \underline{U}_{VN} \qquad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{VN} - \underline{U}_{WN} \qquad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{WN} - \underline{U}_{UN} \qquad (4)$$

Für die **Beträge** der **Dreieckspannung** U_{Δ} und der **Sternspannung** U_Y ergibt sich aus den

Winkelbeziehungen
$$U_{12} = 2 \times U_{UN} \times \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times U_{UN} \qquad (5)$$

Allgemein gilt für jeden Strang:
$$U_D = \sqrt{3} \times U_{Strang} = \sqrt{3} \times U_Y \qquad (6)$$

Wir werden fortan im Verbraucher-Netz die Sternspannungen oder die Leiterspannungen (Dreieckspannungen) verwenden.

Als **Nennspannung** U des Dreiphasennetzes ist die **Dreieckspannung** vereinbart.

(„400V-Netz“ heißt: Dreieckspannung $U_D = 400\text{ V}$, Sternspannung $U_Y = 230\text{ V}$)

In Bezug auf den hier gleich Null gewählten Nullphasenwinkel der Spannung $U_1 = U_{1N} = U_{UN}$ (Bild 3b) folgen aus der Verwendung der **Nennspannung** U die komplexen Stern- und Dreieckspannungen:

<u>Sternspannungen</u>	<u>Dreieckspannungen</u>	
$\underline{U}_{1N} = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad \underline{\text{D}} \quad 0^\circ$	$\underline{U}_{12} = U \quad \underline{\text{D}} \quad 30^\circ$	
$\underline{U}_{2N} = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad \underline{\text{D}} \quad -120^\circ$	$\underline{U}_{23} = U \quad \underline{\text{D}} \quad -90^\circ$	(7a) (7b)
$\underline{U}_{3N} = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad \underline{\text{D}} \quad -240^\circ$	$\underline{U}_{31} = U \quad \underline{\text{D}} \quad -210^\circ$	

2.2. Dreieckschaltung des Erzeugers

Bei Dreieckschaltung der Erzeugerstränge steht nur **ein** symmetrisches Spannungssystem mit drei um ebenfalls 120° gegeneinander verschobenen Spannungen an den Außenleitern zur Verfügung.

•

Dabei gilt:

$Außenleiterspannung = Strangspannung = Dreieckspannung$

Legt man wieder die Strangspannung \underline{U}_U in die reelle Achse, ergibt sich das Spannungssystem der Dreieckspannungen:

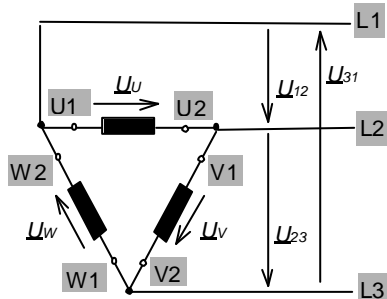
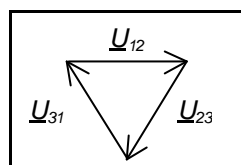


Bild 4a

Bild 4 Erzeuger in Dreieckschaltung



(8)
Bild 4b

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_U = \underline{U}_U \quad \underline{\text{D}} \quad 0^\circ \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_V = \underline{U}_U \quad \underline{\text{D}} \quad -120^\circ \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_W = \underline{U}_U \quad \underline{\text{D}} \quad -240^\circ \end{aligned}$$

Nach dem Maschensatz muß die Summe der Strangspannungen und damit auch der Außenleiterspannungen gleich Null sein. Die Zeiger der Spannungen bilden ein symmetrisches Dreieck (Bild 4b). Im Gegensatz zur Sternschaltung des Erzeugers **steht hier ein Sternpunkt für den Anschluß eines neutralen Leiters nicht zur Verfügung (Dreileiternetz).**

3. Das Dreiphasensystem bei symmetrischer Belastung

3.1 Strangströme und Außenleiterströme bei Sternschaltung und bei Dreieckschaltung

Die Relationen der Ströme in den Außenleitern und in den Strängen treten in Erzeuger und Verbraucher gleichermaßen auf.

Eine Belastung heißt symmetrisch, wenn der komplexe Widerstand \underline{Z} der drei Belastungsstränge gleich ist (Bild 5a auf Seite 5). Wir nehmen den Erzeuger als ideale, symmetrische dreiphasige Spannungsquelle an.

Im Bild 5a sind zusammengefaßt die Anschlüsse eines symmetrischen Verbrauchers in Sternschaltung und daneben eines Verbrauchers in Dreieckschaltung an ein symmetrisches Vierleiternetz dargestellt. Darunter sind im Bild 5b jeweils die Zeigerdiagramme der Strangspannungen und der Strangströme bei symmetrischer Belastung gezeichnet.

Die Zusammenhänge zwischen den Strangströmen und den (Außen-)Leiterströmen bei Sternschaltung und bei Dreieckschaltung sind aus den Zeigerdiagrammen im Bild 5c ersichtlich..

Hierzu die Erläuterung:

3.1.1 Sternschaltung des Verbrauchers

An jedem Verbraucherstrang liegt die Sternspannung des Netzes (Bild 5a, links).

Den Zeiger der Sternspannung $\underline{U}_1 = \underline{U}_{1N} = \underline{U}_{UN}$ legen wir wieder in die reelle Achse (Bild 5b).

Mit dem in allen Strängen gleichen komplexen Widerstand \underline{Z} des symmetrischen Verbrauchers folgt gemäß Bild 5a und b unter Verwendung von Glh (8) für **die Strangströme, die hier gleich den Außenleiterströmen sind:**

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}} \times \frac{U}{\sqrt{3}} \underline{D} - \underline{j} \underline{Z} \\
 \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} \underline{D} - 120^\circ = \frac{1}{\underline{Z}} \times \frac{U}{\sqrt{3}} \underline{D} (-120^\circ - \underline{j} \underline{Z}) \\
 \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} \underline{D} - 240^\circ = \underline{I}_1 \underline{D} - 240^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{1N} = \underline{U}_{UN} &= \frac{U}{\sqrt{3}} \underline{D} 0^\circ \\
 \underline{I}_1 &= \frac{U}{\sqrt{3} \times \underline{Z}} \underline{D} - \underline{j} \underline{Z} \\
 \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \underline{D} - 120^\circ \\
 \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 \underline{D} - 240^\circ
 \end{aligned}$$

(9)

Bei *symmetrischer Belastung* bilden auch die Strangströme wegen der jeweils gleichen Phasenverschiebung von 120° ein *symmetrisches Dreieck* mit den Effektivwerten

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_Y = \frac{U_Y}{\underline{Z}} = \frac{U_D}{\sqrt{3} \times \underline{Z}} \tag{10}$$

Infolgedessen ist der Summenstrom \underline{I}_N im neutralen Leiter Null (Bild 5c):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \tag{11}$$

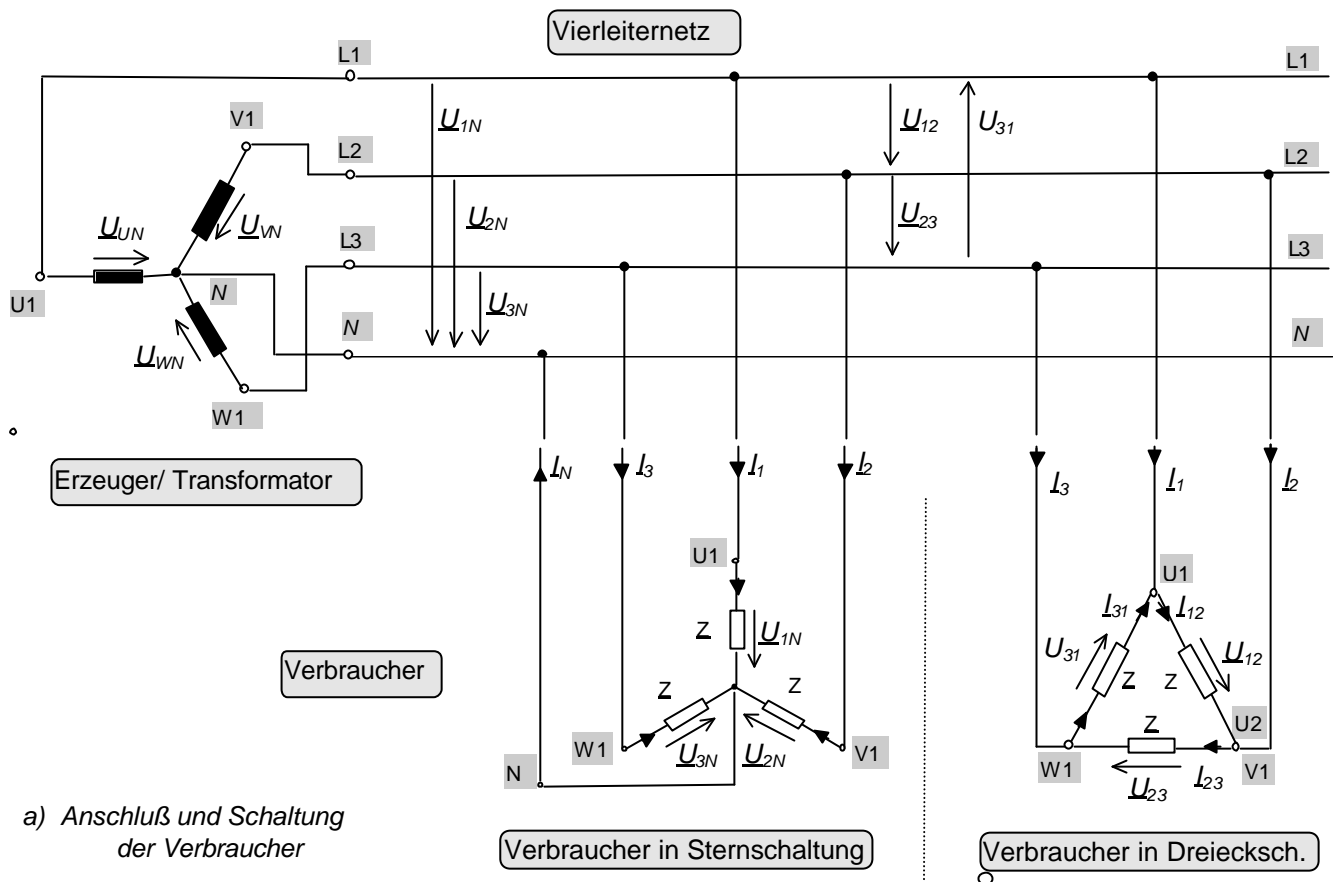
Demnach genügt es, den Strom nur für einen Strang zu berechnen. Die Ströme der beiden anderen Stränge ergeben sich durch Multiplikation des Zeigers des ersten Stromes mit dem

$$\text{„Drehoperator“} \quad a = e^{-j \frac{2\pi}{3}} = \cos 120^\circ - j \cdot \sin 120^\circ = -0,5 - j \cdot 0,866 \tag{12}$$

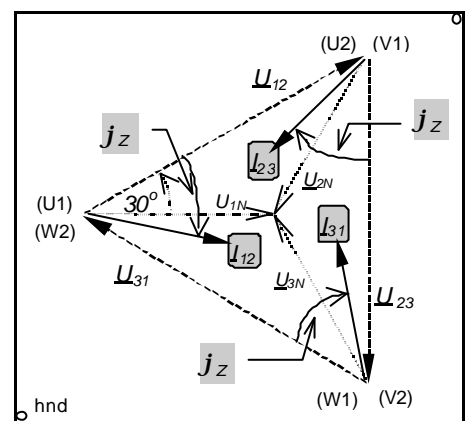
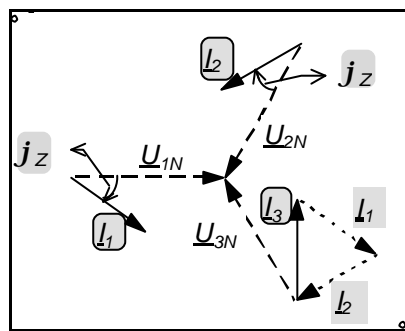
Nur bei *unsymmetrischer* Belastung ergänzen sich die Strangströme nicht zu Null, und es fließt im

$$\text{neutralen Leiter ein Strom} \quad \underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \tag{13}$$

nd



b) Strangspannungen und Strangströme



c) Strang- und Leiterströme

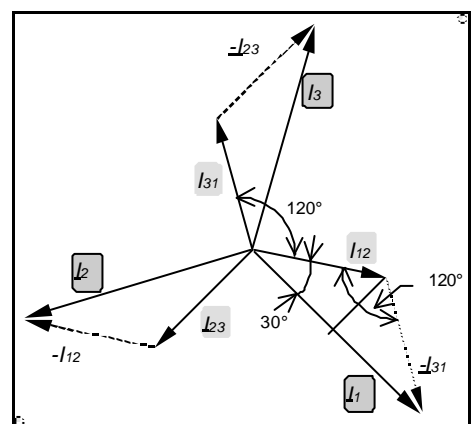
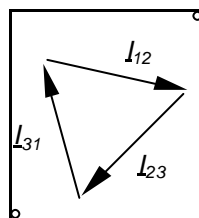
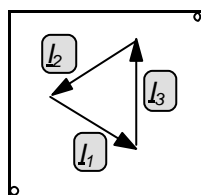


Bild 5 Strangströme und Leiterströme bei symmetrischer Belastung

3.1.2 Dreieckschaltung des Verbrauchers

Bei der Dreieckschaltung liegen an den Strängen des Verbrauchers die Dreiecksspannungen U_{12}, U_{23}, U_{31} des Drehstromnetzes (Bild 5a). Aus den Dreiecksspannungen gemäß Gln (7b) folgen die Strangströme in Analogie zu Gln (9).

Mit
$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z} = \frac{U}{Z} \underline{\underline{D(30^\circ - j Z)}} = I_D \underline{\underline{D(30^\circ - j Z)}} \quad (14)$$

bei symmetriebedingter Gleichheit der Effektivwerte der Strangströme

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_D = \frac{U_D}{Z} = \frac{U}{Z} \quad (15)$$

folgt

$$\begin{aligned} I_{12} &= I_D \underline{\underline{D(30^\circ - j Z)}} \\ I_{23} &= I_D \underline{\underline{D(-90^\circ - j Z)}} \\ I_{31} &= I_D \underline{\underline{D(-210^\circ - j Z)}} \end{aligned} \quad (16)$$

Diese im Bild 5b in Bezug zu den Strangspannungen eingetragenen Zeiger der Strangströme (I_{12}, \dots) des Verbrauchers müssen sich wegen des fehlenden Sternpunktleiters in jedem Belastungsfall zu einem Dreieck schließen (Bild 5c Mitte).

Die Außenleiterströme folgen aus dem Knotensatz an den Anschlußklemmen (Bild 5a):

$$I_1 = I_{12} - I_{31} \quad I_2 = I_{23} - I_{12} \quad I_3 = I_{31} - I_{23} \quad (17)$$

Aus den Winkelbeziehungen der Strang- und Außenleiterströme in Bild 5c folgt die Beziehung zwischen den Effektivwerten von Strang- und Außenleiterströmen bei Dreieckschaltung:

$$I = 2 \times I_D \times \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times I_D \quad (18)$$

Die Außenleiterströme eines in Dreieck geschalteten Verbrauchers sind $\sqrt{3}$ mal so groß wie die Strangströme !

Wird derselbe symmetrische Verbraucher einmal in Sternschaltung und einmal in Dreieckschaltung seiner Stränge an das gleiche Drehstromnetz angeschlossen (wie z. B. in Bild 6), dann erhöht sich der Leiterstrom bei Dreieckschaltung gemäß den Gln. (19),(20) um den Faktor 3 !

Sternschaltung des Verbrauchers:

$$I = I_Y = \frac{U_Y}{Z} = \frac{U}{\sqrt{3} \times Z} \quad (19)$$

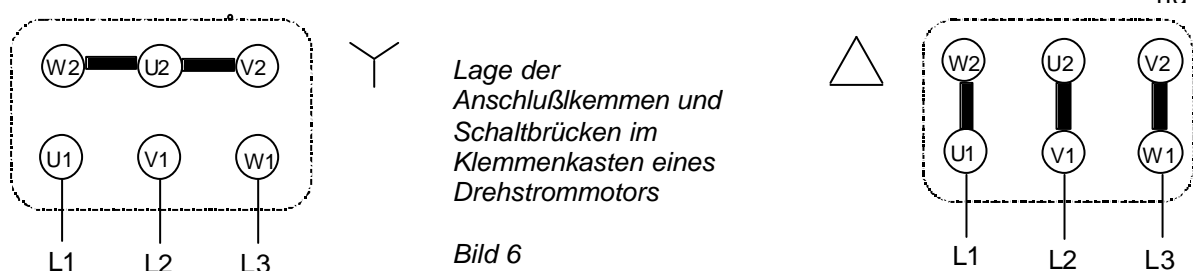
Dreieckschaltung :

$$I = \sqrt{3} \times I_D = \sqrt{3} \times \frac{U}{Z} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3} \times U_Y}{Z} = \frac{3 \times U_Y}{Z} = 3 \times I_Y \quad (20)$$

Das Verhältnis der Leiterströme:

$$\frac{I_{\text{Leiter D}}}{I_{\text{Leiter Y}}} = 3 \quad (20a)$$

Dieser Sachverhalt wird beim sogenannten *Stern-Dreieck-Anlauf* von Drehstrom-Asynchronmotoren zur Reduzierung der infolge der großen Anlaufströme (ca. $6 \times I_{\text{Nenn}}$) bedingten Netzbelastung genutzt.



3.2. Die Leistung im Dreiphasensystem

Die Leistung in einem Dreiphasensystem ergibt sich aus der Summe der Leistungen in den Strängen (folgend Index $_{Str}$ für Stranggrößen).

Wirkleistung eines Stranges:
$$P_{Str} = U_{Str} \times I_{Str} \times \cos \varphi_{Str} \quad (21)$$

Gesamtleistung der drei Stränge bei symmetrischer Belastung

($I_{1Str} = I_{2Str} = I_{3Str}$):

$$P = \sum P_{Str}$$

$$P = 3 \cdot P_{Str} = 3 \cdot U_{Str} \cdot I_{Str} \cdot \cos \varphi \quad (22)$$

Mit den abgeleiteten Beziehungen zwischen Strang- und Leitergrößen bei Stern- und bei Dreieckschaltung (Bild 5 b und c)

Sternschaltung	Dreieckschaltung
$U = \sqrt{3} \cdot U_{Str}$	$U = U_{Str}$
$I = I_{Str}$	$I = \sqrt{3} \cdot I_{Str}$ nd

(23)

ergibt sich für die Berechnung der Gesamtleistung aus den meßbaren Leitergrößen U und I

für die Sternschaltung
$$P = 3 \cdot \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (24)$$

für die Dreieckschaltung
$$P = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi .$$

Diese Übereinstimmung der Leistungsberechnung für Stern- und Dreieckschaltung besteht auch für die Scheinleistung und für die Blindleistung im Dreiphasensystem:

Wirkleistung:
$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (25)$$

Blindleistung:
$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (26)$$

Scheinleistung
$$S = \sqrt{3} U \cdot I \quad (27)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Leistungsfaktor
$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (28)$$

Berechnungshinweis für Stromaufnahme eines Drehstrommotors:

Leistungsangabe (auch P_N auf Typenschild) ist stets abgegebene (mechanische) Leistung.

Deshalb:
$$P_{el} = \frac{P_{ab}}{\eta} \quad (29)$$

daraus
$$I = \frac{P_{el}}{\sqrt{3} \times U \times \cos \varphi} \quad (30)$$

Richtwerte: $\cos \varphi \approx 0,7 \dots 0,9$; Wirkungsgrade $\eta \approx 0,7 \dots 0,96$ im Bereich der Nennleistung (kleine Werte für $P_N \approx 0,5$ kW, die großen Werte für $P_N \approx 1000$ kW).

3.3 Leistungsmessung im Drehstromsystem

Gemessen wird in der Regel die Wirkleistung.

Wirkleistungsmessung im Vierleiternetz

Unabhängig davon, ob der Sternpunkt N des Verbrauchers mit dem Neutralen Leiter N verbunden ist oder nicht, ergibt sich die vom Verbraucher aufgenommene Wirkleistung aus der Summe der von den Wattmetern angezeigten Einzelleistungen:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

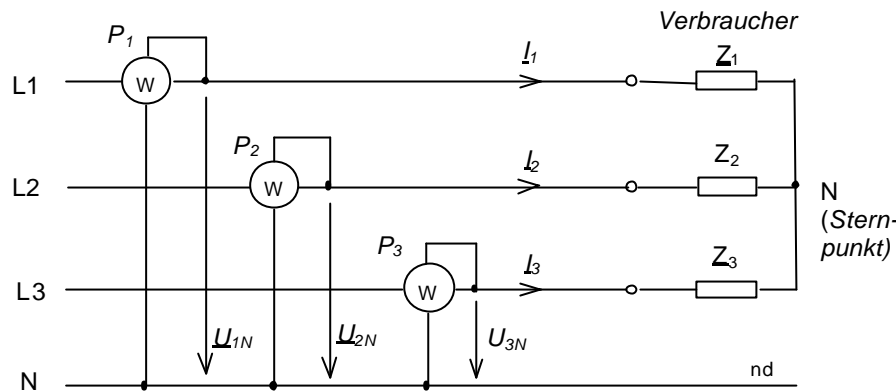


Bild 7
Wirkleistungsmessung im Vierleiternetz

Wirkleistungsmessung im Dreileiternetz

Wegen des nichtangeschlossenen Sternpunktes ist im Dreileiternetz zwangsweise $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Unter dieser Voraussetzung erhält man die vom Verbraucher aufgenommene gesamte Wirkleistung aus den in der „Aronschtaltung“ (Bild 8) von den zwei Wattmetern angezeigten Leistungen P_1 und P_2 :

$$P = P_1 + P_2 \quad (32)$$

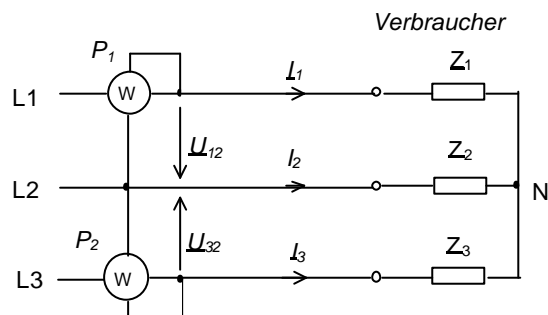


Bild 8
Wirkleistungsmessung am Dreileiternetz Aronschtaltung (Zweiwattmeter-Methode)

4. Anschluß von drei- und einphasigen Verbrauchern an das Vierleiternetz

Im Bild 9 sind die gebräuchlichen Anschlußmöglichkeiten von einphasigen und dreiphasigen Verbrauchern an das Drehstrom-Vierleiternetz angegeben.

Die Anschlußbilder sind ohne die erforderlichen Schalt- und Schutzeinrichtungen gezeichnet !!

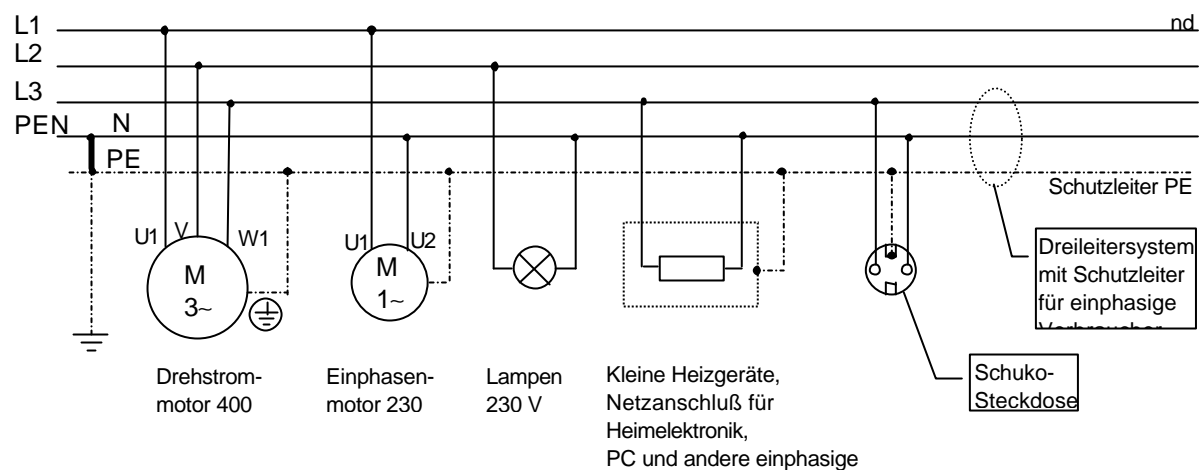


Bild 9: Anschluß von dreiphasigen und einphasigen Verbrauchern an das Drehstromnetz